التمرين الأول

ليكن n عددا طبيعيا و بحيث $n \geq 2$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^2 - n\ln x$

(I) 1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و أنجز جدول التغيرات

2) أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين C_n و C_{n+1}

ب- أرسم المنحنيين C_2 و C_3

(II) نفترض أن $n \geq 4$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين u_n و v_n بحيث $u_n < v_n$

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n^2}{n\ln n} = \frac{1}{2}$

3) أ- بين أن $1 \leq u_n < \sqrt{e}$ $(\forall n \geq 4)$

ب- تحقق أن $f_{n+1}(u_n) = -\ln u_n$ و استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية

ج- بين أن $\frac{1}{n} \leq \ln u_n \leq \frac{3}{n}$ $(\forall n \geq 4)$ استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$

د- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - 1) = 1$

التمرين الثاني

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x + n(1+\ln x)$

ب- أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و أنجز جدول التغيرات

2) أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n

ب- استنتج إشارة $f_n(x)$

3) أ- بين أن $e^{-2} < u_n < e^{-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

4) أحسب $\ln u_n$ بدلالة u_n ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_n$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1) أ) احسب نهايات الدالة f

ب) أدرس منحى تغيرات الدالة f و ضع جدول التغيرات

2) ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 3$

بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل في المجال $[1,e]$ حلا وحيدا U_n

3) أ) بين أن $(U_n)_n$ تناقصية ثم أنها متقاربة

ب) بسن أن $e^{\frac{1}{n}} \leq U_n \leq e^{\frac{3}{n}}$ $(\forall n \geq 3)$ و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n)^n$

ج) بين أن $\frac{U_n - 1}{\ln U_n} = d$ $(\exists d \in]1,U_n[)$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(U_n - 1) = 1$

التمرين الرابع

ليكن n عددا من $\mathbb{N}$. نعتبر الدالة f_n بحيث $f_n(x) = \frac{1}{x} - 2(1 + n\ln x)$

1) أ) أحس النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$

ب) أدرس منحى تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n ثم أن $a_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ) بين أن $f_n(a_{n+1}) = 2\ln a_{n+1}$ و استنتج أن $(a_n)_n$ تزايدية و متقاربة

ب) بين أن $a_n \geq e^{-\frac{1}{2n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n$